

МЕХАΝІКА

О РАЗРУШЕНИИ ГИБКОЙ НИТИ ПРИ НОРМАЛЬНОМ
УДАРЕ ПРИТУПЛЕННЫМ КЛИНОМ

М.Ф.МЕХТИЕВ, К.Ш.МУТАЛЛИМОВ
Бакинский Государственный Университет
mehtiyevmf@mail.ru

В работе рассматривается задача разрушения гибкой упругой нити при поперечном ударе по ней клином с передней плоской частью, с учетом давления внешней среды для сверхзвукового режима движения.

Впервые в работах [1,5] в теоретическом аспекте сформулирована постановка задачи об ударе твердым телом по гибкой деформируемой связи, сопровождающемся разрушением последней. Дальнейшим исследованиям в этой области посвящены работы [2,3,4,6]. Построенные решения этих задач представляют, кроме научно-теоретического, непосредственный практический интерес для ряда технических приложений. Таковыми являются проблемы проектирования и расчета динамических тормозных систем, проблемы разрушения и прогнозирования разрушения специальных конструкций из гибких нитевых систем. При этом представляет интерес учесть форму ударяющего тела и давления внешней среды при ударном взаимодействии твердого тела с гибкими конструкциями в виде нитей или мембраны.

1. Пусть по бесконечно длинной прямолинейной ненапряженной гибкой упругой нити производится нормальный удар с постоянной скоростью V жестким симметричным клином с передней плоской частью. Принимаем, что прогнутая часть нити A_1B_1BA после удара облегает поверхность ударяющего клина. Принимается, что нить прижимается к щеке клина с постоянным давлением P и P нормально к нити (рис.1). Так как рассматривается сверхзвуковой режим движения, то скорость точки A и A_1 больше скорости упругой волны в нити. Длину передней части клина обозначим $2L$, т.е. $|BB_1| = 2L$. При ударе в области A_1B_1BA в нити возникают четыре упругие волны, фронтами которых являются точки C_1, M_1, C_2, M_2 и две волны сильного разрыва A, A_1 (рис.1). Так как

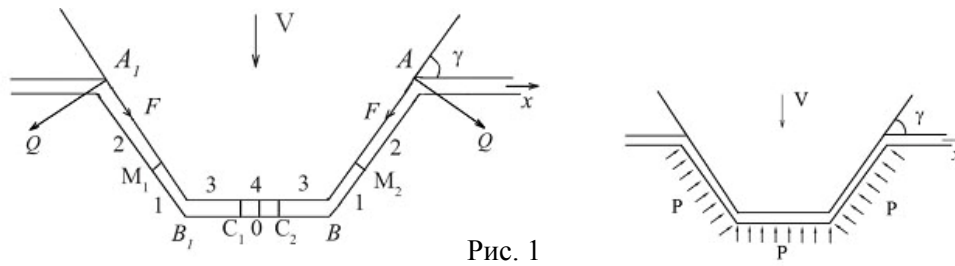


Рис. 1

клин симметричный, то поведение нити в области $A_1M_1C_1O$ и в области AM_2BC_2O одинаково. В областях C_2O и C_1O до момента $t = \frac{L}{a}$

ся в покое относительно клина. Здесь $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость упругой волны в нити.

Взаимодействие между шероховатой поверхностью клина и нитью описывается законом сухого трения Кулона.

Уравнение движения линейно-упругой нити в области облегания будет [6,7]

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{Pl}{EF_0} \frac{\partial u}{\partial x} v_0; \quad v_0 = \text{sign} v; \quad v = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.1)$$

Здесь μ – коэффициент трения, t – время, E – модуль Юнга; l – часть периметра поперечного сечения нити, контактирующая с клином, F_0 – площадь поперечного сечения нити до удара, x – лагранжева координата частицы нити, u – смещение сечения нити на поверхности клина после удара.

Волновая схема движения в нити после удара в плоскости (x, t) показана на рис. 2. В плоскости (x, t) (рис.2) зависимость $x_1 = bt$ соответствует линии BK и она выражает фронт волны сильного разрыва. Линии BK_3 и BK_1 (рис.2) являются фронтом упругих волн, выходящих из точки B соответственно.

После отражения упругих волн возникают новые области в нити; обозначим их 1, 2, 3, 4, ... и т.д.; параметры соответствующих областей будем снабжать этими индексами. Вводим безразмерные величины

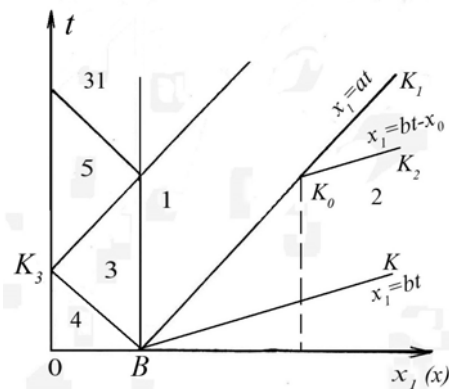


Рис.2

$$\begin{aligned} \bar{u} &= uR^{-1}; \bar{x} = xR^{-1}; \bar{t} = a_0tR^{-1}; \bar{P} = LPR(EF_0)^{-1}; \\ \bar{b} &= ba_0^{-1}; M = Va^{-1}; \bar{v} = va^{-1}; \bar{\sigma} = \bar{\sigma}E^{-1}; \bar{L} = LR^{-1}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\bar{x}_1 = x_1R^{-1}; x_1 = x - L; b = V\text{ctg } \gamma; \bar{b} = M\text{ctg } \gamma;$$

Здесь R – постоянная величина, имеющая размерность длины; b – скорость точки излома A . В дальнейшем во всех соотношениях и тех, которые будут из них получаться, черточки над буквами опускаются. Тогда уравнение (1.1) линейно-упругой нити в области обгегания будет:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \mu P \frac{\partial u}{\partial x_1} v_0. \quad (1.3)$$

Все задачи будем решать для интервала времени $0 \leq t < \frac{L}{a}$.

2. Сформулируем граничные условия для решения задачи при сверхзвуковом режиме движения. Здесь, кроме условия на фронте волны сильного разрыва (в точке излома A) и на фронтах упругих волн C_1, M_1, C_2, M_2 , нужно задавать замыкающие условия в узлах клина B и B_1 . В точках B, B_1 (рис.1) движение нити принимается как движение через неподвижные блоки и в точке B имеет условие

$$\varepsilon(x, t) \Big|_{x=L-0} = \varepsilon(x, t) \Big|_{x=L+0} \quad (2.1)$$

и кинематическое условие в виде

$$v(x, t) \Big|_{x=L-0} = v(x, t) \Big|_{x=L+0} \cdot \cos \gamma, \quad (2.2)$$

здесь ε - деформации.

При сверхзвуковом режиме условия на волне сильного разрыва (в точке излома A) в безразмерном виде могут быть записаны в виде [1,6]

$$v_2 = 0; \quad \varepsilon_2 = \sec \gamma - 1; \quad (\sigma_2 = \varepsilon_2) \quad (2.3)$$

для первого режима при $F < \mu_* Q$;

$$\begin{cases} v_2 = b(\sec \gamma - 1 - \varepsilon_2); \\ \varepsilon_2 = \frac{M^2}{M^2 - \text{tg}^2 \gamma} \left(\text{tg} \gamma_* - \text{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \sin \gamma; \end{cases} \quad (2.4)$$

$$(\mu_* = \text{tg} \gamma_*), \quad \gamma < 2\gamma_*, \quad M = \frac{V}{a},$$

для второго режима при $F = \mu_* Q$;

$$\begin{cases} v_2 = M \cos \gamma (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma_*) > 0; \\ \varepsilon_2 = \left(\operatorname{tg} \gamma_* - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \sin \gamma < 0; \\ (\sigma_2 = 0), \gamma > 2\gamma_*, \end{cases} \quad (2.5)$$

для третьего режима, при $F = \mu_* Q$.

Третий режим соответствует процессу соударения, при котором за точкой излома элементы нити по поверхности клина сморщиваются и собираются в "гармошку", но это происходит при нулевых напряжениях. При этом нельзя пользоваться связью между напряжением и деформацией.

Здесь F, Q - касательная и нормальная к поверхности тела сосредоточенной силы; μ_* - коэффициент трения в точке излома A ; V - скорость удара; γ - угол между первоначальным положением нити и щекой клина $BA (B_1A_1)$. Индекс 2 относится к величинам за точкой излома A ; $v_2, \varepsilon_2, \sigma_2$ - скорость частиц, деформация, напряжение за точкой излома, соответственно.

На фронтах 4-3, 1-2 (рис.1) имеем условия непрерывности смещения в виде

$$u_3 = u_4; \quad (2.6)$$

$$u_1 = u_2. \quad (2.7)$$

3. Для получения решения уравнения (1.3), представим функцию $u(x_1, t)$ в виде разложения по параметру μ (μ - считаем малым, $\mu < 1$):

$$u_n(x_1, t) = u_n^{(0)} + \mu u_n^{(1)} + \mu^2 u_n^{(2)} + \dots \quad (3.1)$$

Здесь

$$n=1, 2, 3, 4, 5, \dots, x_1 = x - t. \quad (3.2)$$

Ограничимся рассмотрением двух членов в правой части (3.1) и, подставляя (3.1) в (1.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получаем следующие уравнения (с учетом (3.2)):

$$\frac{\partial^2 u_n^{(0)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_n^{(0)}}{\partial x_1^2}; \quad \left(\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - 1; \varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - 1; \varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right); \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_n^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_n^{(1)}}{\partial x_1^2} - P \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_1} v_0; \quad \left(v_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} \right). \quad (3.4)$$

Решения уравнений (3.3) и (3.4) в областях 1, 2, 3, соответственно, $\left(t < \frac{L}{a} \right)$ представим в виде

$$\begin{cases} u_1^{(0)} = a_{01}(x_1 - t) + b_{01}(x_1 + t); \\ u_1^{(1)} = a_{11}(x_1 - t)^2 + b_{11}(x_1 + t)^2 - \frac{P}{2}(a_{01} + b_{01})(t - x_1)x_1; \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} u_2^{(0)} = a_{02}(x_1 - t) + b_{02}(x_1 + t); \\ u_2^{(1)} = a_{12}(x_1 - t)^2 + b_{12}(x_1 + t)^2 + \frac{P}{4}(a_{02} + b_{02})(x_1^2 - t^2); \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} u_3^{(0)} = a_{03}(x_1 - t) + b_{03}(x_1 + t); \\ u_3^{(1)} = a_{13}(x_1 - t)^2 + b_{13}(x_1 + t)^2 + \frac{P}{2}(a_{03} + b_{03})(x_1 + t)x_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Решения $u_1^{(0)}$, $u_2^{(0)}$, $u_3^{(0)}$ соответствуют автомодельному решению ($P=0$) [6].

Коэффициенты a_{01} , b_{01} , a_{02} , b_{02} , ..., a_{13} , b_{13} подлежат определению.

Из условий (2.3) или (2.4) в точке излома A определим константы a_{02} , b_{02} , a_{12} , b_{12} в виде

$$a_{02} = (1 + \varepsilon_2^{(0)} - v_2^{(0)}) \cdot 2^{-1}; \quad b_{02} = (1 + \varepsilon_2^{(0)} + v_2^{(0)}) \cdot 2^{-1}; \quad (3.8)$$

$$a_{12} = -\frac{1 + \varepsilon_2^{(0)}}{8} \frac{b + 1}{b - 1} P; \quad b_{12} = -\frac{1 + \varepsilon_2^{(0)}}{8} \frac{b - 1}{b + 1} P.$$

Из условий (2.6) и (2.7) имеем

$$a_{03} = 0; \quad a_{13} = 0; \quad b_{01} = b_{02}; \quad b_{11} = b_{12}. \quad (3.9)$$

Из условий (2.1), (2.2), (2.6), (2.7) определяются константы b_{01} , a_{01} , a_{11} , b_{11} , b_{03} , b_{13} в виде:

$$\begin{cases} b_{01} = \frac{1 + \varepsilon_2^{(0)} + v_2^{(0)}}{2}; \quad a_{01} = b_{01} \frac{\cos \gamma - 1}{\cos \gamma + 1} + \frac{1}{1 + \cos \gamma}; \\ a_{11} = \frac{-P}{4(1 + \cos \gamma)} \left[(1 - \cos \gamma) \frac{1 + \varepsilon_2^{(0)}}{2} \frac{b - 1}{b + 1} + 1 + 2 \frac{\varepsilon_2^{(0)} + v_2^{(0)}}{1 + \sec \gamma} \right] < 0; \\ b_{11} = b_{12} = -\frac{1 + \varepsilon_2^{(0)}}{8} \frac{b - 1}{b + 1} P; \quad b_{03} = (\varepsilon_2^{(0)} + v_2^{(0)}) \frac{\cos \gamma}{1 + \cos \gamma}; \\ b_{13} = -\frac{P}{4} \frac{\cos \gamma}{1 + \cos \gamma} \left[(1 + \varepsilon_2^{(0)}) \frac{b - 1}{b + 1} + 1 + 2 \frac{\varepsilon_2^{(0)} + v_2^{(0)}}{1 + \sec \gamma} \right]. \end{cases} \quad (3.10)$$

Здесь обозначения $\sigma_2^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}, v_2^{(0)}$ соответствуют значению деформации и скорости частицы на волне сильного разрыва (в точке A) и выражаются формулами (2.3) или (2.4). Таким образом, напряжения и скорость частицы нити в областях 2, 1, 3 соответственно будут в виде:

$$\begin{cases} \sigma_2 = \sigma_2^{(0)} + \mu P \left(1 + \varepsilon_2^{(0)}\right) \frac{bt - x_1}{b^2 - 1} v_0; \\ v_2 = v_2^{(0)} - \mu P \left(1 + \varepsilon_2^{(0)}\right) \frac{bt - x_1}{b^2 - 1} b v_0; \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_1^{(0)} + \mu \left[2a_{11}(x_1 - t) + 2b_{11}(x_1 + t) - \frac{P}{2} \left(1 + \varepsilon_1^{(0)}\right) (t - 2x_1) \right] v_0; \\ v_1 = v_1^{(0)} + \mu \left[-2a_{11}(x_1 - t) + 2b_{11}(x_1 + t) - \frac{P}{2} \left(1 + \varepsilon_1^{(0)}\right) x_1 \right] v_0; \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \sigma_3 = \sigma_3^{(0)} + \mu \left[2b_{13}(x_1 + t) + \frac{P}{2} b_{03} (2x_1 + t) \right] v_0; \\ v_3 = v_3^{(0)} + \mu \left[2b_{13}(x_1 + t) + \frac{P}{2} b_{03} x_1 \right] v_0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Здесь $\sigma_1^{(0)}, v_1^{(0)}, \varepsilon_1^{(0)}, \sigma_3^{(0)}, v_3^{(0)}$ соответствуют случаю автономной задачи [6] и выражаются в виде

$$\sigma_1^{(0)} = \sigma_3^{(0)} = (1 + \sec \gamma)^{-1} \left(\varepsilon_2^{(0)} + v_2^{(0)} \right); \quad \left(\sigma_1^{(0)} = \varepsilon_1^{(0)}; \sigma_3^{(0)} = \varepsilon_3^{(0)} \right); \quad (3.14)$$

$$v_1^{(0)} = (1 + \cos \gamma)^{-1} \left(v_2^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)} \right); \quad v_3^{(0)} = v_1^{(0)} \cos \gamma.$$

Из (3.11) следует, что когда на волне сильного разрыва имеет место первый режим движения, т.е. имеет условие (2.3), то скорость частицы $v_2^{(0)} = 0$. Тогда из (3.11) следует, что скорость v_2 в области 2 ($t < x_1 \leq bt$) оказывается отрицательной при $v_0 = +1$. Получается, что $v_2 < 0$ при $v_0 = +1$ и $v_2 > 0$ при $v_0 = -1$. Для устранения противоречивости необходимо положить скорость частиц в области $t < x_1 \leq bt$ равной нулю, тогда из (3.11) имеем

$$\begin{cases} \sigma_2 = \sigma_2^{(0)} = \sec \gamma - 1; \quad v_2 = 0; \quad v_0 = 0; \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(0)} = \sigma_2^{(0)}, \quad v_2^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

При этом решения в области 1 ($0 \leq x_1 < t$) будут

$$v_1 = v_1^{(0)} - \mu \frac{P}{2} \left[\frac{3 - \cos \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} (t - x_1) + (1 + \varepsilon_1^{(0)}) x_1 \right]; v_0 = +1; \quad (3.16)$$

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(0)} + \mu \frac{P}{2} \left[\frac{3 - \cos \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} (t - x_1) - (1 + \varepsilon_1^{(0)}) (t - 2x_1) \right].$$

При $x_1 = 0$, с учетом (3.14) для выражения $\varepsilon_1^{(0)}$, формулы (3.16) примут вид:

$$v_1 = v_1^{(0)} - \mu P \frac{3 - \cos \gamma}{2(1 + \cos \gamma)^2} t; v_0 = +1; \quad (3.17)$$

$$\sigma_1 = \sigma_1^{(0)} + \mu \frac{P}{2} \left[\frac{3 - \cos \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} - (1 + \varepsilon_1^{(0)}) \right] t.$$

Следовательно, в области $0 \leq x_1 < t$ относительная скорость частицы V_1 положительна, а при ударе острым клином [4] эта область являлась областью покоя, т.е. $v_1 = 0$.

Решения задачи в области 3 (рис.1) будут

$$v_3(x_1, t) = v_3^{(0)} + \mu \frac{P}{2} \left[v_3^{(0)} x_1 - \frac{3 - \cos \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} (x_1 + t) \cos \gamma \right]; v_0 = +1; \quad (3.18)$$

$$\sigma_3(x_1, t) = \sigma_3^{(0)} + \mu \frac{P}{2} \left[\sigma_3^{(0)} (2x_1 + t) - \frac{3 - \cos \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} (x_1 + t) \cos \gamma \right].$$

Учитывая (3.14) и (3.15) в формулах (3.18), определим V_3 и σ_3 в точке $x_1 = 0$ в виде

$$v_3(0, t) = v_3^{(0)} - \mu \frac{P}{2} \cdot \frac{(3 - \cos \gamma)t}{(1 + \cos \gamma)^2} \cos \gamma; \quad (3.19)$$

$$\sigma_3(0, t) = \sigma_3^{(0)} - \mu \frac{P}{2} \cdot \frac{3 \cos \gamma - 1}{(1 + \cos \gamma)^2} t.$$

Из формул (3.17), (3.19) следует, что для первого режима движения функции $v_3(0, t)$, $\sigma_3(0, t)$, $v_1(0, t)$, $\sigma_1(0, t)$ -убывающие линейные функции по времени, так как для первого режима [1,6] $3 \cos \gamma > 1$.

Теперь исследуем решение (3.11)-(3.13), когда на волне сильного разрыва имеет место второй режим движения, т.е. когда имеем условия (2.4) при $\gamma < 2\gamma_*$.

Из формулы (3.11) следует, что в области $t \leq x_1 < bt$ $\sigma_2 > 0$, а скорость V_2 вдоль линии

$$x_1 = bt - x_0; \quad x_0 = \frac{v_2^{(0)}}{bA_0}; \quad A_0 = \frac{\mu P}{b^2 - 1} (1 + \varepsilon_2^{(0)}). \quad (3.20)$$

обращается в нуль. Выше этой линии скорость, вопреки предположению, оказывается отрицательной. Противоречие можно устранить, если принять, что движение частиц в этом углу $K_1K_0K_2$ (рис.2) прекращается, а напряжение, согласно (3.11) и (3.20), принимает постоянное значение [4,6]

$$\sigma_2 = \varepsilon_2^{(0)} + \frac{v_2^{(0)}}{b}; \quad v_2 = 0; \quad v_0 = 0. \quad (3.21)$$

А решения (3.12), (3.13) остаются в силе, так как в соответствующих областях имеет место $v_1 > 0$, $v_3 > 0$, $v_0 = +1$.

4. Теперь исследуем случай, когда за точкой излома $A(A_1)$ происходит сморщивание нити, т.е. имеет условие (2.5). При этом для интервала времени $0 \leq t < \frac{L}{a}$ в нити возникают четыре области 1, 2, 3, 4 (рис.3). Фронт 1-2 является

границей раздела области со сморщиванием (область 2) и области, где нить вновь растянута (область 1). В области 4 нить находится в покое относительно клина, нить растянута и в области 3 (рис.3). Фронт 1-2 (фронт распрямления)

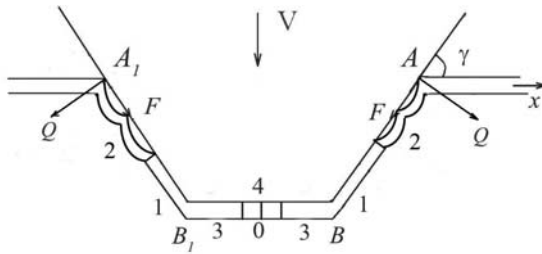


Рис.3.

подлежит определению в ходе решения задачи. Неизвестную функцию $x = x_*(t)$, являющуюся границей раздела области со сморщиванием и областью, где нить растянута, представим в виде разложения по малому параметру μ в виде

$$x_1 = x_*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n w_n t^n. \quad (4.1)$$

Здесь выражения (4.1) написаны в безразмерном виде; w_n ($n = 0, 1, \dots$) – неизвестные пока безразмерные постоянные.

При решении задачи в разложении (4.1) ограничимся двумя членами в правой части. Решение задачи в области 2 - $x_*(t) \leq x < Mctg\gamma$ определяется в виде (2.5). Решения задачи в областях 1 и 3 представляются в виде (3.12) и (3.13), соответственно, и в этих формулах $\varepsilon_1^{(0)}$, $\sigma_1^{(0)}$, $v_1^{(0)}$ соответствуют решению [6] при $P = 0$.

На фронте распрямления $x_1 = x_*(t)$ имеем условие

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \dot{x}_*(t)(v_2 - v_1); \quad \sigma_2 = 0; \quad (4.2)$$

$$v_2 - v_1 = \dot{x}_*(t)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2); \quad \dot{x}_* = \frac{dx_*}{dt}. \quad (4.3)$$

Подставляя (3.12), (3.13), (2.5) (4.1) в условия (2.1), (2.2), (4.2), (4.3) и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , определим неизвестные коэффициенты $w_0, w_1, a_{11}, b_{11}, b_{13}, b_{03}, \sigma_1^{(0)}, \sigma_3^{(0)}, v_1^{(0)}, v_3^{(0)}$ в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(0)} &= \frac{w_0 v_2}{1 + w_0 \sec \gamma}; \quad v_1^{(0)} = \varepsilon_1^{(0)} \sec \gamma; \quad \varepsilon_1^{(0)} = \varepsilon_3^{(0)} = v_3^{(0)}; \quad v_3^{(0)} = v_1^{(0)} \cos \gamma; \\ w_0 &= a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2}; \quad a_1 = \frac{\varepsilon_2}{2(v_2 - \varepsilon_2 \sec \gamma)}; \quad a_2 = \frac{v_2}{v_2 - \varepsilon_2 \sec \gamma}; \quad w_0 > 0; \\ w_1 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} > 0; \quad \Delta_2 = \frac{P}{4} \left[\frac{w_0}{1 - w_0^2} (1 + \varepsilon_1^{(0)}) (w_0 + \sec \gamma) + \frac{\varepsilon_1^{(0)} \sec \gamma}{2} \right] > 0; \\ \Delta &= \frac{\sec \gamma - 1}{4(1 + w_0)^2} [-\varepsilon_2 w_0 - \varepsilon_1^{(0)} (1 - w_0)] + \frac{\sec \gamma + 1}{4(1 - w_0)^2} [\varepsilon_1^{(0)} (1 + w_0) - \varepsilon_2 w_0]; \quad (4.4) \\ \Delta &> 0, \quad b_{03} = \varepsilon_3^{(0)} = v_3^{(0)}; \quad \sigma_1^{(0)} = \sigma_3^{(0)} = \varepsilon_1^{(0)}; \\ b_{13} &= \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \Delta_1 = \frac{P}{8} \varepsilon_3^{(0)} \left[\frac{\varepsilon_1^{(0)}}{2w_0} \left(\frac{1 - w_0}{(1 + w_0)^2} - \frac{1 + w_0}{(1 - w_0)^2} \right) + (\varepsilon_1^{(0)} + 1) \left(\frac{1}{(1 + w_0)^2} - \frac{1}{(1 - w_0)^2} \right) \right]; \\ \Delta_1 &< 0; \quad b_{13} < 0; \quad a_{11} = -w_1 K_5 - K_4; \quad b_{11} = -w_1 K_6 + K_7; \\ K_4 &= \frac{P}{8} (1 + \varepsilon_1^{(0)}) \frac{1 - 3w_0}{1 - w_0} < 0; \quad K_5 = \frac{v_2 - v_1^{(0)} + \varepsilon_1^{(0)}}{2(1 - w_0)^2} > 0; \quad K_6 = \frac{v_2 - v_1^{(0)} - \varepsilon_1^{(0)}}{2(1 + w_0)^2}; \\ K_7 &= \frac{P}{8} (1 + \varepsilon_1^{(0)}) \frac{1 - w_0}{1 + w_0} > 0. \end{aligned}$$

Здесь ε_2, V_2 выражаются формулами (2.5). Таким образом, решение задачи в областях 3 и 1 выражаются формулами (3.12) и (3.13), а неизвестные коэффициенты определены в виде (4.4).

Функция $x_1 = x_*(t)$, представляющая фронт распрямления нити, будет в виде

$$x_1 = x_*(t) = w_0 t + \mu w_1 t^2.$$

Тогда скорость фронта распрямления за точкой излома нити выражается формулой

$$v_*(t) = \frac{dx_*(t)}{dt} = w_0 + 2w_1 t. \quad (4.5)$$

Так как в формуле (4.4) w_0, w_1 - положительные величины ($w_0 > 0, w_1 > 0$), то из выражения (4.5) следует, что с учетом давления внешней среды ($P \neq 0$) скорость фронта распрямления $v_*(t)$ нити больше, чем скорость фронта распрямления w_0 автомодельной задачи ($P = 0$) [6]. Следовательно, учет давления внешней среды в задаче о поперечном ударе по гибкой упругой нити приводит к уменьшению области сморщивания нити за точкой излома при

сверхзвуковом режиме движения.

5. Теперь рассмотрим задачу с учетом возможности обрыва линейно упругой нити при ударе по ней притупленным клином для сверхзвукового режима движения. Для этого нужно определить $\max \sigma$ в построенном выше решении и, приравняв эту величину критическому (разрушающему) напряжению σ_{np} , получить линию на плоскости (γ, M) , ограничивающую режимы, для которых построенные выше решения остаются приемлемыми, а в области вне этой границы нужно построить решение с учетом обрыва нити. Известно, что если две одинаковые волны, выходящие (рис.1) из точек B и B_1 , в точке "0" встречаются в момент $t = \frac{L}{a}$, в этом месте напряжение удваивается, а скорость частицы обращается в нуль. Однако, в рассматриваемом случае, напряжение удваивается до момента $t = \frac{L}{a}$ в узлах клина B и B_1 . Сначала исследуем обрыв упругой

нити в случае, когда на волне сильного разрыва (в точке излома A) имеет место первый режим движения, т.е. условие (2.3). Из формул (3.17), (3.19) для выражения напряжения видно, что максимальное напряжение в сечениях B и B_1 возникает в начале удара и равно

$$2\sigma_1^{(0)}|_{x_1=0} = \sigma_{np}, \quad (5.1)$$

где σ_{np} – прочность на разрыв материала нити.

Пусть на волне сильного разрыва имеет место первый режим движения, т.е. имеем условия (2.3), тогда предельное условие (5.1), с учетом (3.14) и (3.17), примет вид

$$\cos \gamma = \frac{1 - \sigma_*}{1 + \sigma_*}; \quad \sigma_* = \frac{\sigma_{np}}{2}$$

и решение этого уравнения относительно γ_p будет

$$\gamma_p = \arccos \frac{1 - \sigma_*}{1 + \sigma_*}. \quad (5.2)$$

Здесь γ_p – разрушающее значение γ (критический угол) и при $\gamma < \gamma_p$ разрушения (обрыва) нити в узлах B и B_1 не будет, а для всех $\gamma \geq \gamma_p$ нить будет разрушена в узлах B и B_1 . Решение задачи с обрывом отличается от решения без обрыва лишь в областях 3 и 1 (рис.1). Отметим, что если при некоторой комбинации параметров задачи в точках B и B_1 нити достигается условие (5.1), то вне границы (5.1) решение задачи строится с введением обрыва нити, т.е. условия

$$\sigma(x_1, t) = 0.$$

Тогда решение задачи с обрывом в областях 3 и 1 определяется с учетом условия

$$\sigma_3(x_1, t) = 0; \quad \sigma_1(x_1, t) = 0 \quad \text{при } x_1 = 0 \quad (5.3)$$

и условия непрерывности функции $u_3(x_1, t)$, $u_1(x_1, t)$ на фронтах $x_1 + t = 0$ и $x_1 - t = 0$, соответственно.

Тогда решения в областях 3_1 и 1_1 , соответственно, будут (рис.4)

$$\sigma_{3_1}(x_1, t) = 0; \quad v_{3_1}(x_1, t) = 0 \quad (5.4)$$

$$\sigma_{1_1}(x_1, t) = \mu \frac{P}{2} m_1 \cdot m_2^{-1} x_1; \quad v_{1_1}(x_1, t) = \varepsilon_2^{(0)} - \mu \frac{P}{2} m_3 \cdot m_2^{-1} t \quad (5.5)$$

Здесь $\varepsilon_2^{(0)} = \sec \gamma - 1$; $v_0 = +1$; $m_1 = 2 - (b-1)\varepsilon_2^{(0)}$; $m_3 = 2b - (b-1)\varepsilon_2^{(0)}$; $m_2 = b + 1$.

Из (5.5), (5.4) следует, что после обрыва в области 3_1 нить полностью разгружена (рис.4) и движется вместе с ударяющим клином, а в области 1_1 напряжение равно нулю только в точке $x_1 = 0$, а скорость частицы нити положительна.

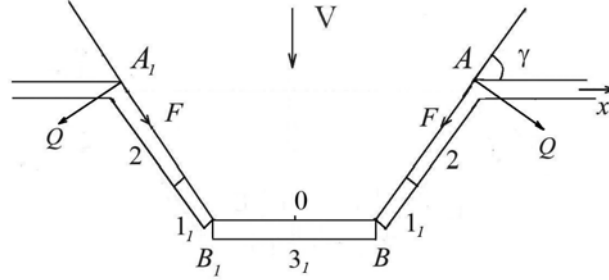


Рис. 4

Теперь исследуем обрыв нити в случае, когда на волне сильного разрыва имеет место второй режим движения. Тогда условие (5.1) с учетом (3.12)-(3.14) примет вид:

$$2 \frac{\varepsilon_2^{(0)} + v_2^{(0)}}{1 + \sec \gamma} = \sigma_{np} \quad (5.6)$$

Здесь $\varepsilon_2^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ выражаются формулами (2.4).

Из соотношения (5.6) следует, что здесь, кроме γ , участвует также $M = \frac{V}{a}$, т.е. предельное условие на плоскости (M, γ) будет представлять собой некоторую кривую [6]. В области ниже этой кривой нить не обрывается, выше нее будет происходить обрыв нити в узлах клина B и B_1 . После обрыва нити в областях 3_1 и 1_1 решение будет в виде

$$\sigma_{3_1} = 0; \quad v_{3_1} = 0;$$

$$\sigma_{1_1} = \mu P \frac{2 - (b-1)\varepsilon_2^{(0)}}{2(b+1)} x_1 > 0; \quad v_0 = +1; \quad (5.7)$$

$$v_{1_1} = \varepsilon_2^{(0)} + v_2^{(0)} - \frac{\mu P (b-1)\varepsilon_2^{(0)} + 2b}{2(b+1)} t > 0. \quad (5.8)$$

Из формул (5.4), (5.5), (5.7), (5.8) следует, что схема движения нити по-

сле обрыва аналогична.

Отметим, что условия (5.1) служат для возникновения обрыва нити в точке $x_1 = 0$ зависимо от скорости удара и угла γ , когда за волной сильного разрыва происходит сморщивание нити. Отметим, что решение задачи с разрушением для этого случая очень просто, т.е. в области $0 \leq x_1 \leq tMct\gamma$ нить сморщена и формула

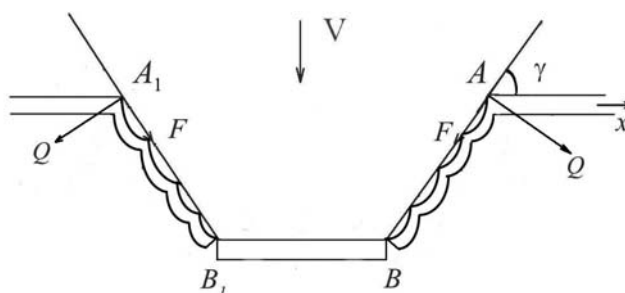


Рис. 5

(2.5) верна всюду в области $0 \leq x_1 \leq tMct\gamma$ (рис.5), а разрушенная часть нити BB_1 находится в состоянии покоя и движется с клином вместе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С.С., Муталлимов Ш.М. О динамике соударения твердого тела с гибкой нитью и мембраной// Прикладная математика и механика, 1985, 49, №1, с.85-93.
2. Мехтиев М.Ф., Муталлимов Ш.М., Мамедов Э.А. Об одной модели разрушения гибкой мембраны при ударе конусом// Доклады НАН Азербайджана 2008, 54, №2, с.29-34.
3. Мехтиев М.Ф., Муталлимов К.Ш. Поперечный удар клином по упругопластической нити при наличии трения// Тр.ИММ АН Азербайджана. Баку: Элм, 1996, т. 5(13), с. 124-127.
4. Муталлимов К.Ш. Об обрыве упругой нити при поперечном ударе клином// Прикл.механика, 1997, 33, №7, с.79-83.
5. Муталлимов Ш.М. Волновая динамика гибких связей. Баку: Элм, 2001, 267с.
6. Мехтиев М.Ф., Муталлимов Ш.М., Мустафаев С.М. Об одной схеме разрушения гибкой мембраны при ударе конусом // Доклады НАН Азербайджана, 2010, 56, №1, с.17-25.

KÜTLƏNMİŞ PAZLA NORMAL ZƏRBƏDƏ ÇEVİK SAPIN DAĞILMASI

M.F.MƏHDİYEV, K.Ş.MÜTƏLLİMOV

XÜLASƏ

Məqalədə xarici mühitin təzyiqini nəzərə almaqla ön tərəfi müstəvi formalı pazla elastik sapa eninə zərbədə səs sürətindən böyük hərəkət rejimi üçün sapın dağılması (qırılması) məsələsi həll olunur.

ON THE DESTRUCTION OF A FLEXIBLE FILAMENT AT A NORMAL IMPACT BY DULLED WEDGE

M.F.MEKHTİEV, K.Sh.MUTALLIMOV

SUMMARY

The paper studies the problem of the breakage of an elastic filament at cross-section impact on it with a forward flat part of a wedge accounting the pressure of the environment fortiesupersonic regime of movement.